



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Spændbetonberegninger

taleksempel

Albertsen, A.

Publication date:
1993

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

Citation for published version (APA):

Albertsen, A. (1993). *Spændbetonberegninger: taleksempel*. (2. udgave udg.) Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitetscenter. U/ Nr. U9301

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

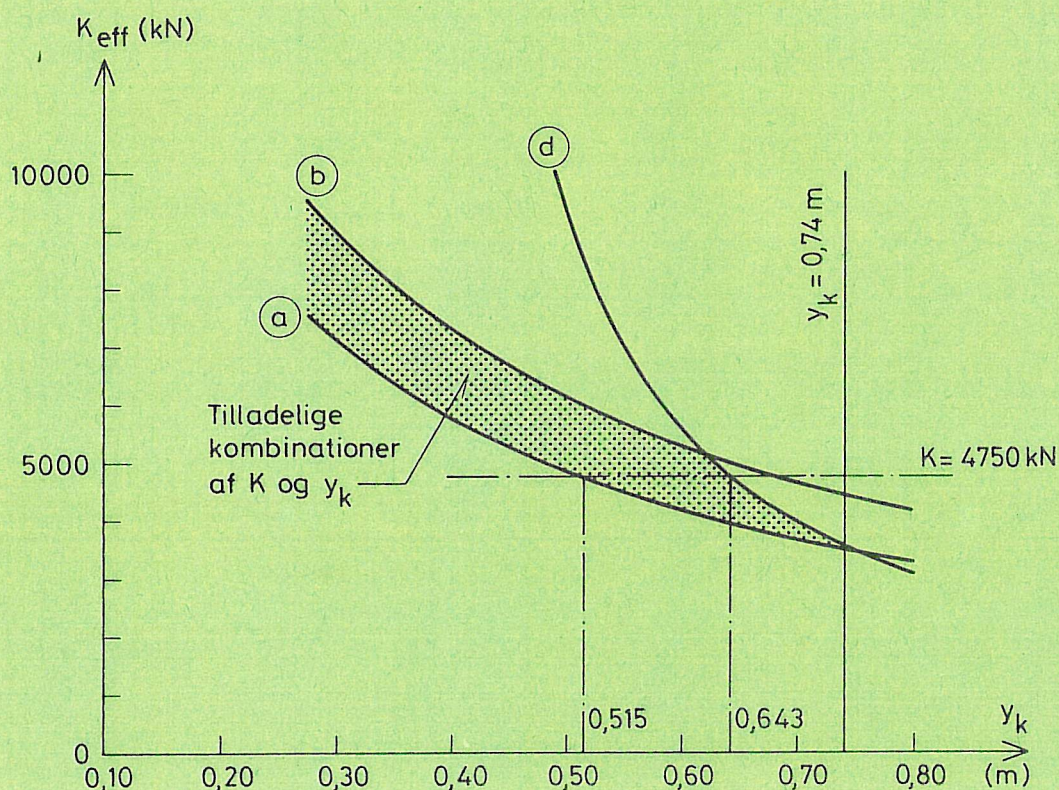
Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

26.75

INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK

DEPT. OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING
AALBORG UNIVERSITETSCENTER • AUC • AALBORG • DANMARK

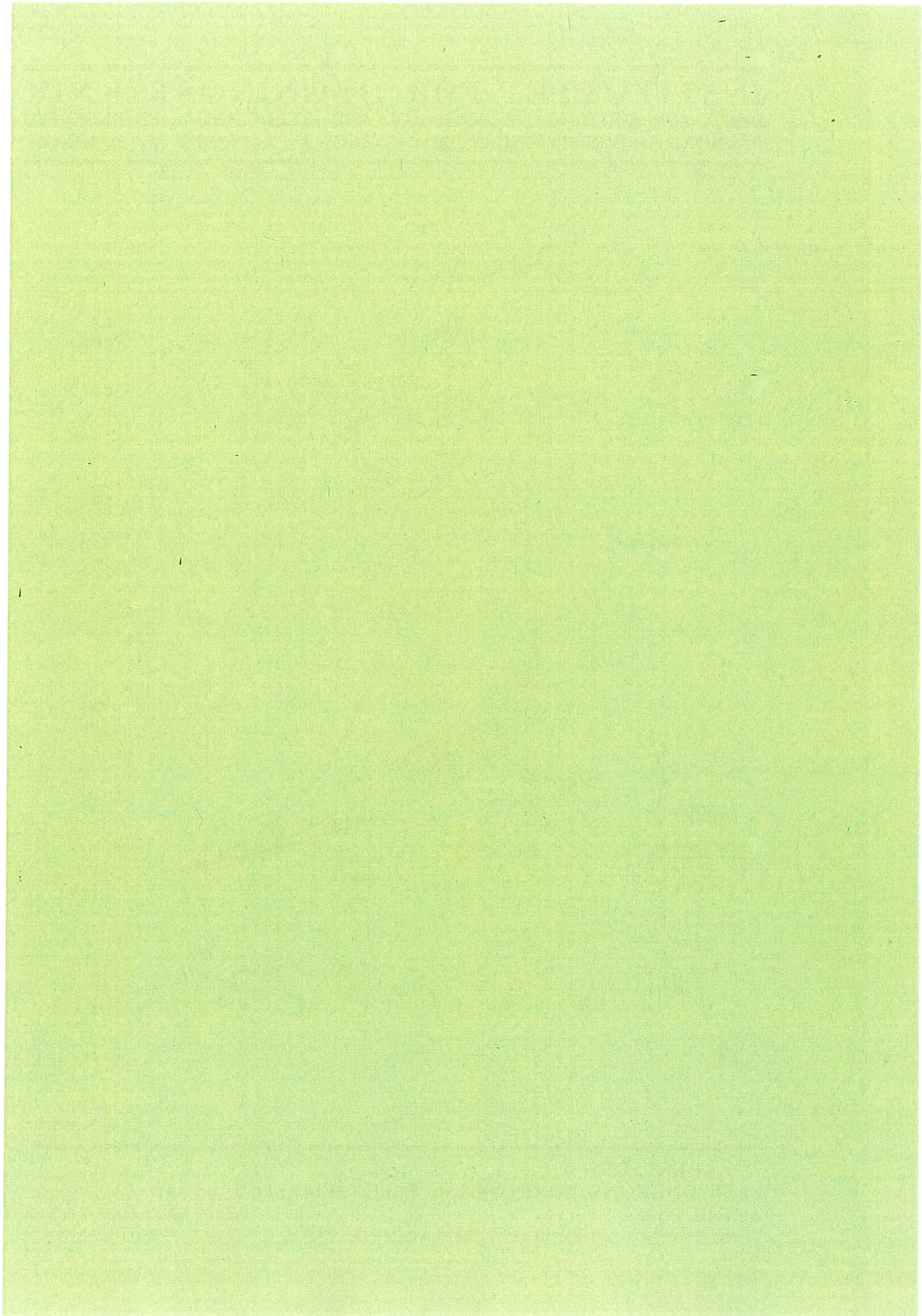


A. ALBERTSEN

SPÆNDBETONBEREGNINGER. TALEKSEMPEL. 2. udgave

APRIL 1993

ISSN 0902-8005 U9301



INDHOLDSFORTEGNELSE

	<u>Side</u>
Indledning	1
Forudsætninger	
Laster	1
Materialer	1
Overslagsberegninger	
Brudstadiet	3
Anvendelsesstadiet	4
Beregning af nødvendig kabelkraft og -placering	5
Kabelgeometri	11
Detailberegninger	
Anvendelsesstadiet, friktionstab og låsetab	12
- normalspændinger	14
- forskydning	15
Brudstadiet, bøjning	20
- forskydning	24
Spaltearmering	28

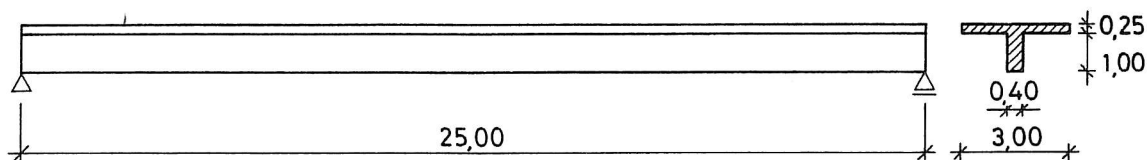
INDLEDNING

I dette eksempel vises en række træk af en typisk spændbeton-beregning.

For at begrænse beregningens omfang behandles spændingstab fra langtidsdeformationer meget summarisk, og emner som valg af forspændingssystem, opspændingsrækkefølge og anordning af slap, dvs. ikke forspændt armering forbigås.

Da der er valgt en statisk bestemt konstruktion, er der ikke lejlighed til at behandle emnet systemforspænding.

De benyttede betegnelser følger DS 411, 3. udgave, hvor det er muligt.



Figur 1. Den undersøgte bjælke. Mål i m.

FORUDSÆTNINGER

LASTER

		partialkoefficient
Egenlast	$g_k = 27,6 \text{ kN/m}$	$\gamma_g = 1,0$
Hvilende last	$q_k = 16 \quad -$	
Bevægelig last	$p_k = 8 \quad -$	$\gamma_p = 1,3$
Vandrende punktlast	$P_k = 40 \quad \text{kN}$	

MATERIALER

Normal kontrolklasse og sikkerhedsklasse.

Partialkoefficienter: $\gamma_c = 1,8$ (beton)

$\gamma_s = 1,4$ (armering)

BETON:

$$\text{trykstyrke } f_{ck} = 35 \text{ MPa} \qquad f_{cd} = 19,4 \text{ MPa}$$

$$\text{trækstyrke } f_{tk} = 1,9 \text{ MPa}$$

I anvendelsesstadiet benyttes

$$\text{max. tryk } r_c = 0,55 \cdot f_{ck} = 19,3 \text{ MPa}$$

$$\text{max. træk } r_t = 0,5 \cdot f_{tk} = 0,9 \text{ MPa}$$

I opspændingsstadiet gås der ud fra den karakteristiske styrke f_{ck}^0 på tidspunktet for opspændingen. Forholdet $f_{ck}^0 : f_{ck}$ afhænger af hærdningsforholdene samt hærdningstiden. Her sættes uden yderligere vurdering af disse forhold $f_{ck}^0 = 0,75 f_{ck}$ og dermed i henhold til DS 411, side 70

$$r_c^0 = 0,7 \cdot f_{ck}^0 = 0,525 \cdot f_{ck} = 18,4 \text{ MPa}$$

$$\text{Desuden sættes } r_t^0 = 0$$

SPÆNDARMERING:

$$\text{brudstyrke } f_{uk} = 1800 \text{ MPa}$$

$$0,2\text{-styrke } f_{yk} = 1650 \text{ MPa} \qquad f_{yd} = 1180 \text{ MPa}$$

$$\text{opspænding } \sigma_s < 0,85 \cdot f_{uk} = 1530 \text{ MPa} \quad (\text{DS 411, side 70})$$

For at begrænse relaxations betydning vælges den initiale forspænding (efter låsetab) til

$$\sigma_{si} \leq 0,75 \cdot f_{uk} = 1350 \text{ MPa}$$

Spændingstab pga. betonens svind og krybning samt spændarmeringens relaxation sættes til $\Delta\sigma_s = 200 \text{ MPa}$ i anvendelsestilstanden (langtid), dvs. den effektive spænding i armeringen sættes til

$$\sigma_{se} \leq 1350 - 200 = 1150 \text{ MPa}$$

OVERSLAGSBEREGNINGER

Indledningsvis gennemføres nogle overslagsmæssige beregninger for at konstatere, om de skønnede betondimensioner er anvende-

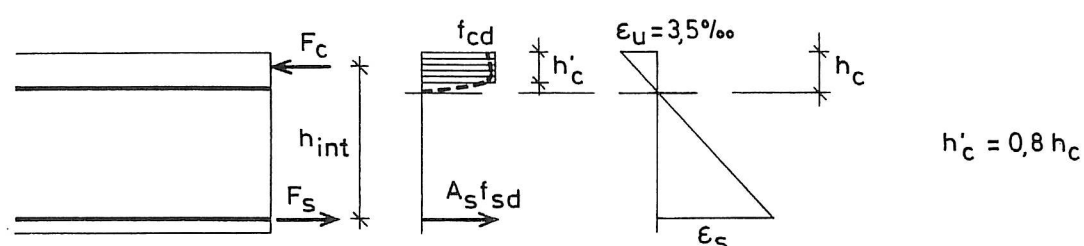
lige, samt fastslå det nødvendige tværsnitsareal af spændarmeringen.

BRUDSTADIET

Regningsmæssigt moment

$$\begin{aligned} M_d &= \gamma_g(M_g + M_q) + \gamma_p(M_{p_1} + M_{p_2}) \\ &= 1,0 \cdot (M_g + M_q) + 1,3 \cdot (M_{p_1} + M_{p_2}) \end{aligned}$$

	Snit A Bjælkeende x = 0	Snit 1 x = 1,0 m	Snit 2 x = 2,0 m	Snit B 1/4-punkt x = 6,25 m	Snit C Midtpunkt x = 12,5 m
Moment					
1,0 M _g	0	331	635	1617	2156
1,0 M _q	0	192	368	938	1250
1,3 M _p	0	125	239	609	813
1,3 M _p	0	50	96	244	325
M _d	0	698	1338	3408	4544 kNm



Figur 2. Spændinger og tøjninger i brudtilstanden.

$$h_{int} \approx h - 0,25 = 1,00 \text{ m}$$

Ved fagmidte skal optages trykkraften

$$F_c = \frac{M_d}{h_{int}} = \frac{4544}{1,0} = 4544 \text{ kN}$$

Idet $F_s = F_d$, fås det nødvendige tværsnitsareal A_s af spændarmeringen til

$$A_{s,nødv} \approx \frac{F_c}{f_{yd}} = \frac{4544}{1180} \cdot 1000 = 3850 \text{ mm}^2$$

Der anvendes 4 kabler á 12L13 (system Freyssinet) med tværsnitsareal $4 \cdot 1115 = 4460 \text{ mm}^2 > 3850$.

Trykzonens højde fås af

$$h'_c = \frac{F_s}{b \cdot f_{cd}} = \frac{4,544}{3,0 \cdot 19,4} = 0,08 \text{ m} \Rightarrow h_c = 0,10 \text{ m}$$

Armeringstøjningen bliver $\epsilon_{so} + \Delta\epsilon_s \approx 5 \cdot 10^{-3} + \Delta\epsilon_s$

$$\Delta\epsilon_s = \frac{h_{ef} - h_c}{h_c} \cdot \epsilon_u = \frac{ca. 1,05 - 0,10}{0,10} \cdot 3,5\% = 33\% \Rightarrow \epsilon_s \approx 38\%$$

ANVENDELSESSTADIET

Det nødvendige modstandsmoment fås af udtrykket

$$W_{nødv} = \frac{\Delta M}{r_c + r_t}$$

hvor ΔM er den maksimale forskel på momentet i det betragtede snit svarende til 2 forskellige lastsituationer. Formlen er udledt i M.P. Nielsen: Beton 1, del 2, side 247-249 og baserer sig på de grundlæggende spændingskriterier.

$$\text{Her er } \Delta M = M_q + M_p + M_P$$

(Bemærk, at egenvægten af bjælken ikke indgår).

Her fås ved fagmidte (max. ΔM)

$$\Delta M = \frac{1}{8} \cdot (16+8) \cdot 25^2 + \frac{1}{4} \cdot 40 \cdot 25 = 2125 \text{ kNm}$$

$$W_{nødv} = \frac{2125 \cdot 10^6}{19,3+0,9} = 115 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 = 0,105 \text{ m}^3$$

For det aktuelle tværsnit, se figur 1, haves følgende tværsnitskonstanter:

Areal	$A_C = 1,15 \text{ m}^2$
Inertimoment	$I_C = 0,139 \text{ m}^4$
Modstandsmoment	$W_{C_1} = 0,153 \text{ m}^3 \text{ (undersiden)}$
-	$W_{C_2} = 0,407 \text{ m}^3 \text{ (oversiden)}$
Tyngdepunktsafstand	$y_0 = 0,342 \text{ m} \text{ fra oversiden}$
Kerneradier	$k_1 = W_{C_1} : A_C = 0,133 \text{ m}$
	$k_2 = W_{C_2} : A_C = 0,354 \text{ m}$

BEREGNING AF NØDVENDIG KABELKRAFT OG -PLACERING

Spændingskriterierne

$$\sigma_c < r_c \quad \text{og} \quad \sigma_{ct} < r_t$$

anvendt i både den normale anvendelsestilstand og i opspændingsstadiet fører til følgende uligheder, der tjener til bestemmelse af den nødvendige kabelkraft K

$$\frac{M_g + M_p - k_1 A_C r_t}{y_k + k_1} \leq K \leq \frac{M_g + k_1 A_C r_c}{y_k + k_1} \quad (\text{underside})$$

$$\frac{M_g + M_p - k_2 A_C r_c}{y_k - k_2} \leq K \leq \frac{M_g + k_2 A_C r_t}{y_k - k_2} \quad (\text{overside})$$

y_k er kabelekscentriciteten i forhold til tværsnittets tyngdepunktslinie. Formlerne er udledt i M.P. Nielsen: Beton 1, del 2, side 251-252.

NB: Her svarer M_p til ΔM i udtrykket side 5, dvs.

$$M_p = M_q + M_{p_1} + M_{p_2}$$

Venstresiderne refererer til anvendelsestilstand, dvs. $f+g+p$ med tilhørende r_t og r_c .

Højresiderne refererer til forspændingsstadiet, dvs. $f+g$ med tilhørende r_t og r_c .

Idet det erindres, at $k_1 \cdot A_C = W_{C_1}$ og $k_2 \cdot A_C = W_{C_2}$, og værdierne for r_t og r_c fra side 2 indsættes, fås:

$$\frac{M_g + M_p - W_{c_1} \cdot 0,9}{Y_k + k_1} \leq K \leq \frac{M_g + W_{c_1} \cdot 18,4}{Y_k + k_1} \quad (\text{underside})$$

$$\frac{M_g + M_p - W_{c_2} \cdot 19,3}{Y_k - k_2} \leq K \leq \frac{M_g + W_{c_2} \cdot 0}{Y_k - k_2} \quad (\text{overside})$$

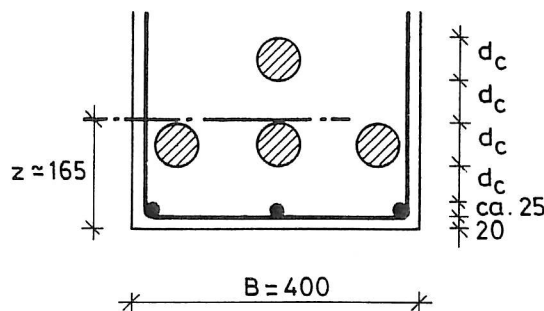
Vedr. kabelkraft K : Bemærk, at det i ulighederne til venstre er kabelkraften K_{eff} i langtidstilstanden, der skal benyttes, og det til højre er den initiale kabelkraft K_i .

Idet $K_{\text{eff}} = \frac{1150}{1350} \cdot K_i$ (se side 2), kan K_{eff} benyttes på begge sider, når ulighederne til højre multipliceres med $\frac{1150}{1350} = 0,85$, dvs. ulighederne får følgende form:

$$\frac{M_g + M_p - W_{c_1} \cdot 0,9}{Y_k + k_1} \leq K_{\text{eff}} \leq \frac{M_g + W_{c_1} \cdot 18,4}{Y_k + k_1} \cdot 0,85$$

$$\frac{M_g + M_p - W_{c_2} \cdot 19,3}{Y_k - k_2} \leq K_{\text{eff}} \leq \frac{M_g}{Y_k - k_2} \cdot 0,85$$

Ved indsættelse af momenter i MNm og længder i m fås kabelkraften i MN.



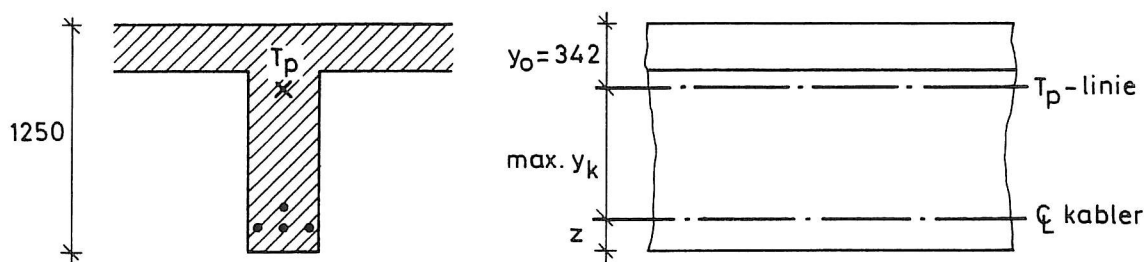
Figur 3. Kabelplacering.
Mål i mm.

Nødv. bredde med 3 kabler i samme lag (moderat miljøklasse) ($d_c \approx 60$ mm)

$$B \geq 5 \cdot d_c + 2 \cdot (35+5) = 380 \text{ mm}$$

Tyngdepunktet af de 4 kabler ligger i afstanden z over undersiden, hvor

$$z = 45 + 1,5 \cdot d_c + 0,5 \cdot d_c = 165 \text{ mm}$$



Figur 4. Max. kabelekscentricitet. Mål i mm.

$$\max y_k = 1250 - 342 - 165 \approx 740 \text{ mm}$$

Momenter for brugslast:

	Bjælkeende $x = 0$	1/4-punkt $x = 6,25 \text{ m}$	Midtpunkt $x = 12,5 \text{ m}$
M_g	0	1617 kNm	2156 kNm
M_q	0	938 -	1250 -
M_p M_{p_1}	0	469 -	625 -
M_{p_2}	0	188 -	250 -
$M_g + M_p$	0	3212 kNm	4281 kNm

På figur 5, 6 og 7 er grænsekurverne for ulighederne afbildet for de 3 undersøgte snit. Sammen med kurven $y_k = 0,74 \text{ m}$ afgrænser de et område, der indeholder tilladelige kombinationer af K_{eff} og y_k .

Ved indsættelse af talværdier i udtrykkene side 6 fås nedenstående uligheder. Grænsekurverne a, b, c og d svarer til lighedstegnene. K_{eff} fås i enheden kN.

$x = 0,0 \text{ m}$ (figur 5)

$$\text{(Kurve (a))} \quad \frac{-138}{y_k + 0,133} \leq K_{\text{eff}} \leq \frac{2510}{y_k + 0,133} \quad \text{(b)}$$

$$\text{Kurve (c)} \quad \frac{-7489}{y_k - 0,354} \leq K_{\text{eff}} \leq \frac{0}{y_k - 0,354} \quad \text{(d)}$$

Da det er uden mening at regne $K_{\text{eff}} < 0$, erstattes den første ulighed af $K_{\text{eff}} \geq 0$.

Den sidste ulighed omskrives til

$$K_{\text{eff}}(y_k - 0,354) \leq 0 \Rightarrow y_k \leq 0,354 \text{ m} \quad (\text{d})$$

$x = 6,25 \text{ m}$ (figur 6)

$$\text{Kurve (a)} \quad \frac{3074}{y_k + 0,133} \leq K_{\text{eff}} \leq \frac{3804}{y_k + 0,133} \quad (\text{b})$$

$$\text{Kurve (c)} \quad \frac{-4277}{y_k - 0,354} \leq K_{\text{eff}} \leq \frac{1374}{y_k - 0,354} \quad (\text{d})$$

$x = 12,5 \text{ m}$ (figur 7)

$$\text{Kurve (a)} \quad \frac{4143}{y_k + 0,133} \leq K_{\text{eff}} \leq \frac{4226}{y_k + 0,133} \quad (\text{b})$$

$$\text{Kurve (c)} \quad \frac{-3574}{y_k - 0,354} \leq K_{\text{eff}} \leq \frac{1833}{y_k - 0,354} \quad (\text{d})$$

Af kurverne ses, at den mindste værdi af kabelkraften, som kan benyttes i alle snit, er

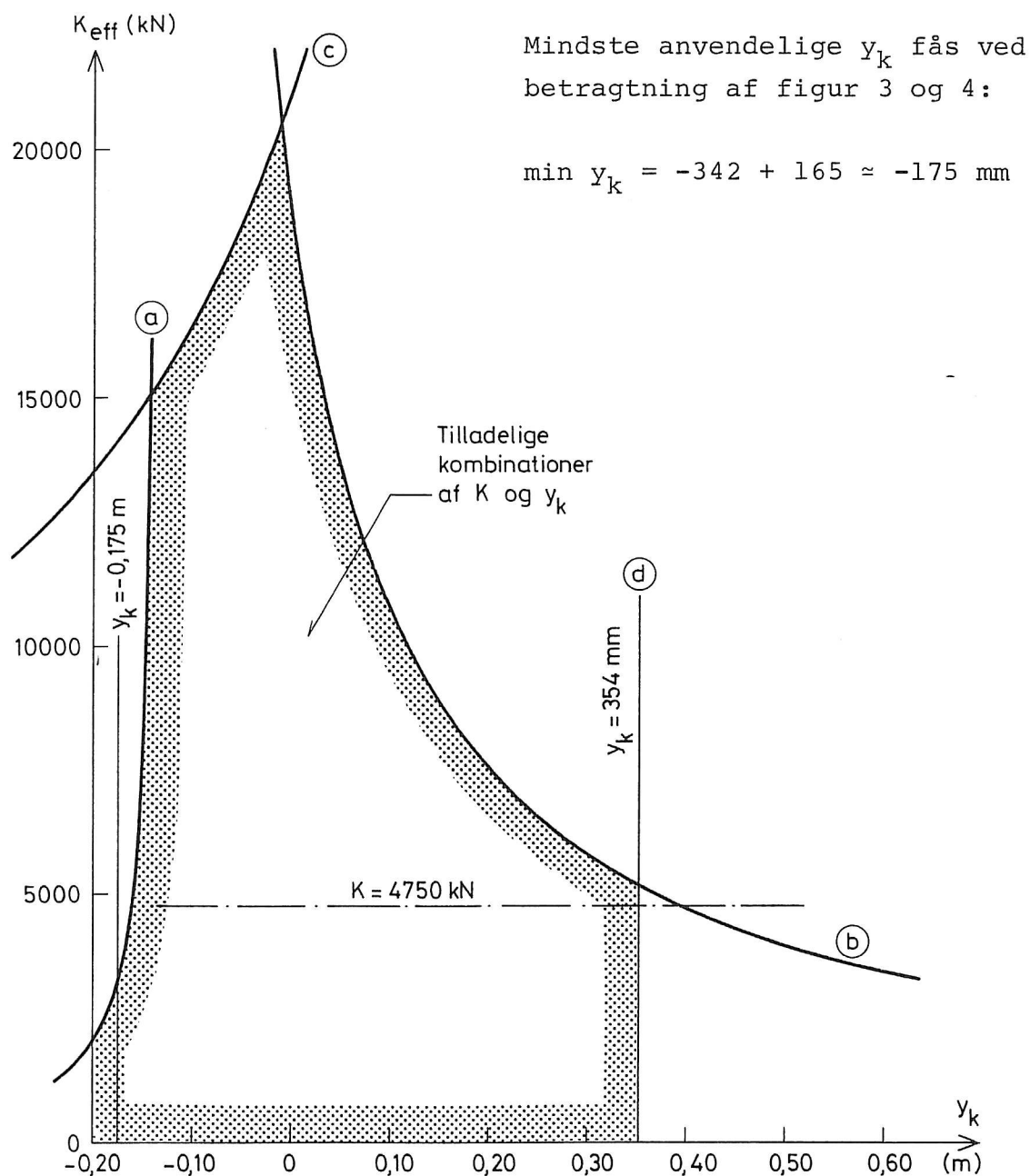
$$K_{\text{eff}} = 4750 \text{ kN}$$

Hvis kabelkraften skal være konstant langs bjælken (ikke korrekt pga. friktionen - se senere), må der stilles særlige krav til y_k i de forskellige snit:

$$x = 0,0 \text{ m} \quad -162 \leq y_k \leq 354 \text{ mm}$$

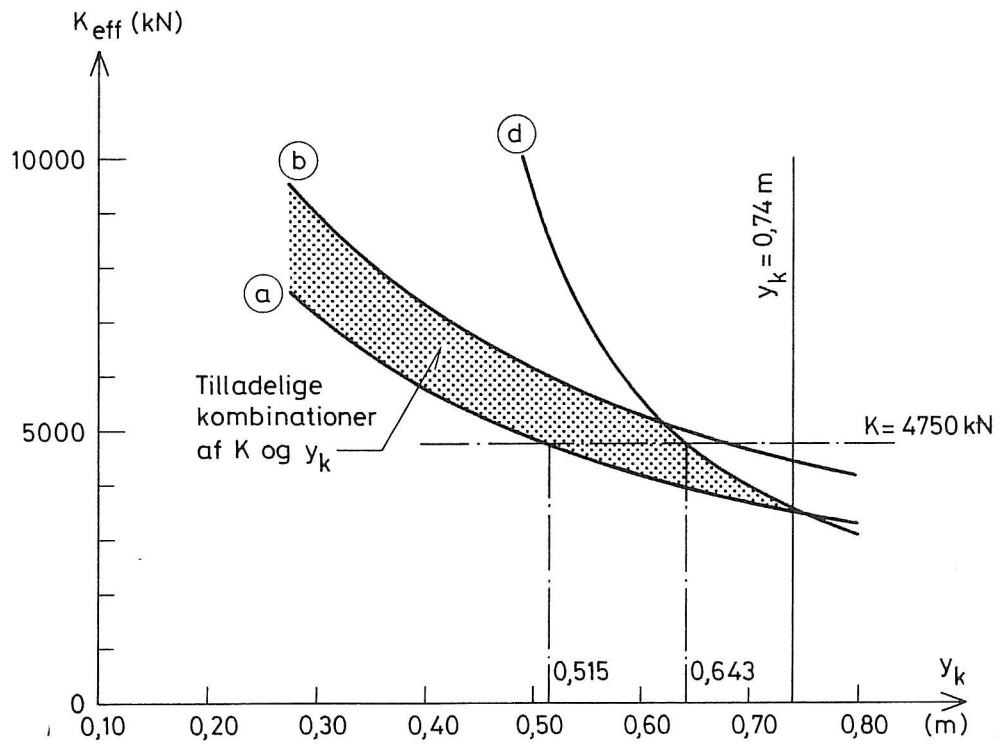
$$x = 6,25 - \quad 514 \leq y_k \leq 643 -$$

$$x = 12,5 - \quad 739 \leq y_k \leq 740 -$$

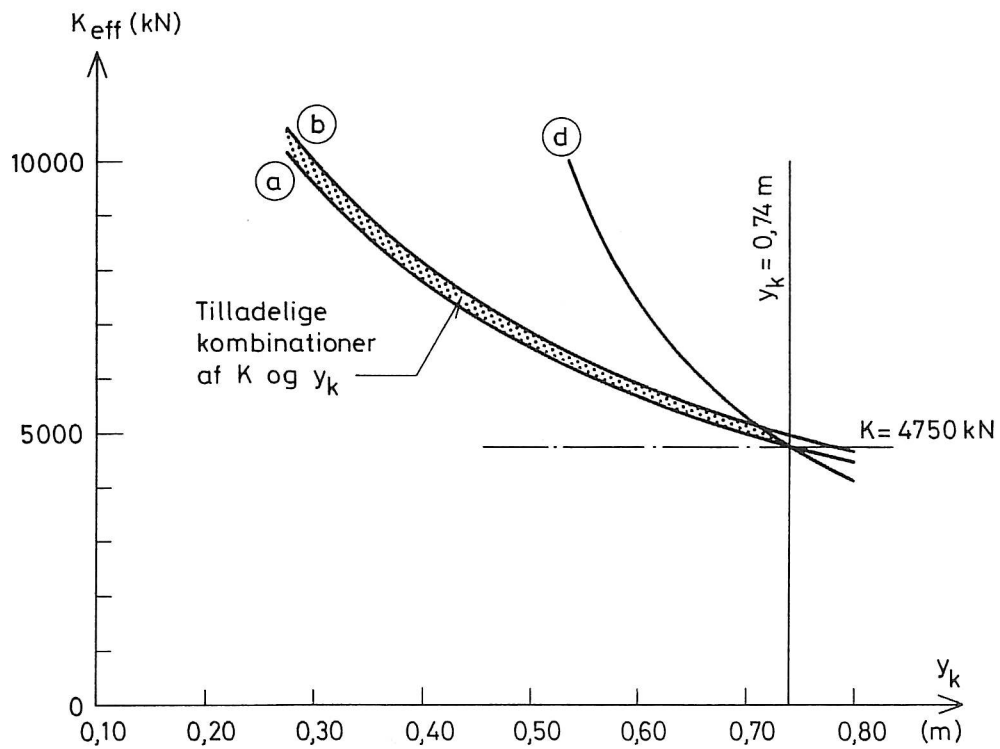


Figur 5. Tilladelige kombinationer af K og y_k ved bjælkeende.

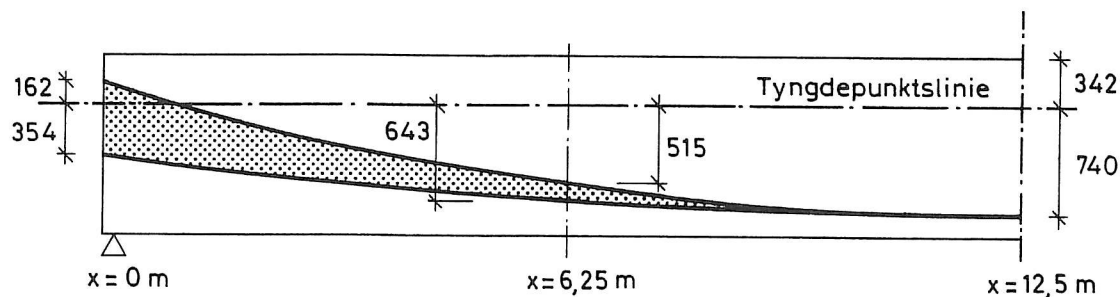
Resultaterne, der er afbildet på figur 5, kan blot betragtes som vejledende, idet forudsætningen om sædvanlig Navier-forde-
ling af normalspændingerne ikke er opfyldt i forankringszonen,
men først i en afstand \approx bjælkehøjden fra bjælkeenden.



Figur 6. Kombinationer af K og y_k i snittet $x = 6,25$ m.



Figur 7. Kombinationer af K og y_k ved fagmidte.



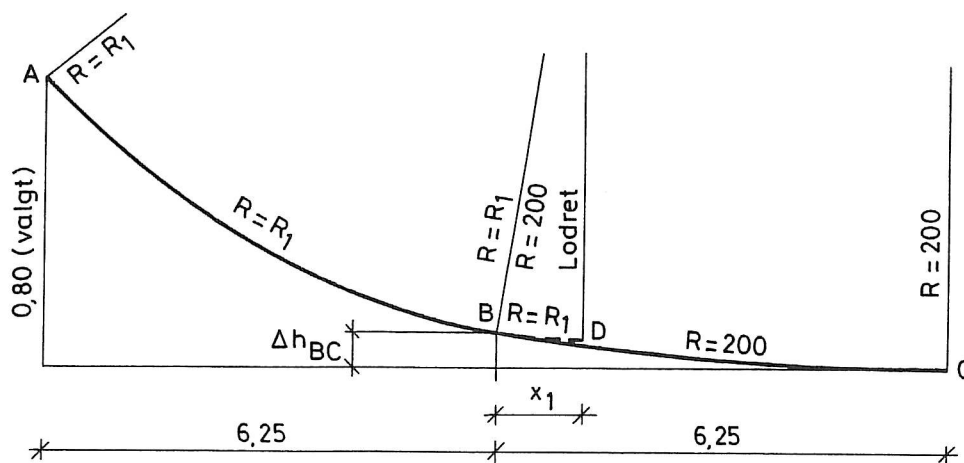
Figur 8. Grænser for kabelføring. Ubenævnte mål i mm.
(Højder tegnet i dobbelt målestok).

Kabelkraftens resultant skal placeres inden for det skraverede område på figur 8.

Hensyn til variation af kabelkraften pga. friktion medfører, at det ikke i alle snit er muligt at gå til grænserne for intervallet af y_k -værdier.

KABELGEOMETRI

Kablernes tyngdepunktslinier vælges som cirkler/parabler, der tangerer hinanden, se figur 9.



Figur 9. Kabelgeometri. Mål i m. Højder overdrevet med faktor 5.

Kurvestykkerne AB og BC skal have samme hældning ϕ_B i punkt B. Punkt C ligger lodret under centrum for cirklen med radius $R = 200$ m. Punkt D er et hjælpepunkt, der ligger lodret under centrum for cirklen med radius R_1 .

$$\underline{BC} \quad \Delta h_{BC} = 200 - \sqrt{200^2 - 6,25^2} \approx \frac{6,25^2}{2 \cdot 200} = 0,098 \text{ m} = 98 \text{ mm}$$

$$\phi_B^h \approx \frac{6,25}{200} = 0,0313 \text{ rad}$$

$$\underline{BD} \quad \phi_B^v \approx \frac{x_1}{R_1}$$

$$\text{Da } \phi_B^v = \phi_B^h \quad \text{fås} \quad \frac{x_1}{R_1} = 0,0313 \quad (1)$$

$$\Delta h_{BD} \approx \frac{x_1^2}{2R_1}$$

$$\underline{AD} \quad \Delta h_{AD} \approx \frac{(x_1 + 6,25)^2}{2 \cdot R_1}$$

$$\begin{aligned} \underline{AC} \quad \Delta h_{AC} &= 0,800 = \Delta h_{AD} - \Delta h_{BD} + \Delta h_{BC} \\ &= \frac{(x_1 + 6,25)^2}{2R_1} - \frac{x_1^2}{2R_1} + 0,098 \end{aligned} \quad (2)$$

Af (1) og (2) fås

$$R_1 = 38,5 \text{ m} \quad \text{og} \quad x_1 = 1,20 \text{ m}$$

$$\text{Heraf fås} \quad \phi_A = \Delta\phi_{AB} + \Delta\phi_{BC} = \frac{6,25}{38,5} + 0,031 = 0,193$$

DETAILBEREGNINGER

ANVENDELSESSTADIET

Beregning af friktionstab og låsetab

Der opspændes fra punkt A (venstre bjælkeende)

$$K = K_A \cdot e^{-\mu \phi \cdot k \cdot s}$$

$$\mu = 0,25$$

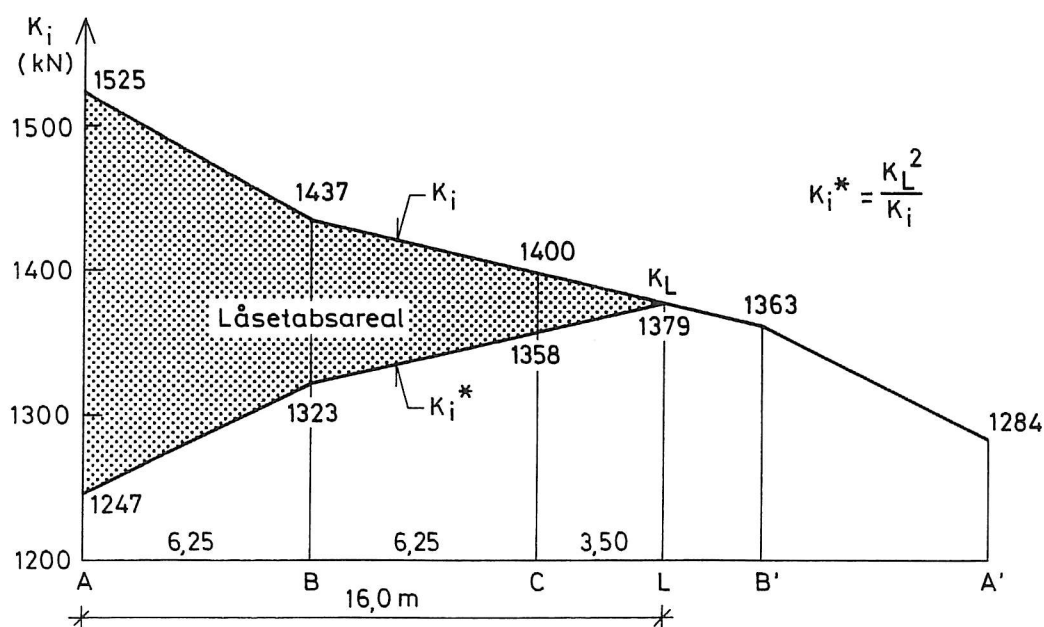
$$k = 0,003 \text{ m}^{-1}$$

Beregningen af kabelkraften før låsning udføres lettest i et skema, f.eks. som nedenstående:

Punkt	Strækning	$\Delta s \approx \Delta x$ (m)	$s \approx x = \sum \Delta x$ (m)	R (m)	$\Delta \phi$ (rad)	$\phi = \sum \Delta \phi$ (rad)	$\mu \cdot \phi$	$k \cdot s$	$z = \mu \phi + ks$	$K/K_A = e^{-z}$	K (kN)
A	AB	6,25	0,00	38,5	0,162	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	1525
B	BC	6,25	6,25	200	0,031	0,162	0,041	0,019	0,060	0,942	1437
C	CB'	6,25	12,50	200	0,031	0,193	0,048	0,038	0,086	0,918	1400
B'	B'A'	6,25	18,75	38,5	0,162	0,224	0,056	0,056	0,112	0,894	1363
A'			25,00			0,385	0,097	0,075	0,172	0,842	1284

*) Ved fagmidte (punkt C) er der iflg. side 8 behov for $K_{\text{eff}} = 4750 \text{ kN}$. Med $K_{\text{eff}} = 0,85 \cdot K_{\text{initial}}$ fås med 4 kabler
 $K_i = \frac{4750}{4 \cdot 0,85} = 1397 \sim 1400 \text{ kN}$

Låsetabet skønnes at strække sig over 16,0 m, se figur 10.



Figur 10. Kabelkraftkurve for 1 kabel.

Låsetab

$$A_{\ell} = \int_{\ell_{g1}} K_{ds} \approx \frac{1}{2} \cdot 6,25 \cdot (278 + 2 \cdot 114 + 42) + \frac{1}{2} \cdot 3,50 \cdot 42 = 1786 \text{ kNm}$$

$$\Delta \ell_{g1} = \frac{A_{\ell}}{E_s \cdot F_s} = \frac{1786 \cdot 10^6}{2,0 \cdot 10^5 \cdot 1115} = 8,0 \text{ mm} = \text{den af leverandøren opgivne standardværdi}$$

Ved låsetabet mistes ved punkt C ca. 3,1% af forspændingskraften. For at opnå den ønskede værdi på 1400 kN må den maksimale opspændingskraft derfor hæves til

$$\max. K_i = 1,031 \cdot 1525 = \underline{1572 \text{ kN}}$$

hvilket giver spændingen

$$\sigma = \frac{1572 \cdot 10^3}{1115} = 1410 \text{ N/mm}^2 \approx 85\% \text{ af } \sigma_{0,2} \text{ (ok)}$$

Med denne lidt højere forspænding forøges låsetabet til $1,031 \cdot 8,0 = 8,2 \text{ mm}$. Afvigelsen fra standardværdien 8,0 mm ligger inden for det sædvanligt tilladte.

Ved opspændingen kan man vælge, hvilken ende der skal spændes fra. Her vælges det at spænde 2 kabler fra hver ende. Herved fås f.eks. $K_i^A = 2 \cdot 1,031 \cdot (1247 + 1284) = 5219 \text{ kN}$

Punkt	A	B	C	B'	A'
x	0	6,25	12,50	18,75	25,00
K_i	5219	5539	5600	5539	5219
$K_i \cdot \cos \phi$	5124	5536	5600	5536	5124
$K_i \cdot \sin \phi$	989	173	0	173	989

Enhed
kN

Normalspændinger

Disse beregnes uden hensyn til armeringens bidrag til tvær-snitskonstanterne.

$$A_C = 1150 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$W_{C_1} = 153 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 \text{ (underside)}$$

$$W_{C_2} = 407 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 \text{ (overside)}$$

Tryk -
Træk +

	A. x = 0 m y _k = -57 mm				B. x = 6,25 m y _k = 645 mm				C. x = 12,50 m y _k = 743 mm			
	N kN	M kNm	σ ₁ MPa	σ ₂ MPa	N	M	σ ₁	σ ₂	N	M	σ ₁	σ ₂
Initial forspænding	5124	292	-4,6 +1,9	-4,6 -0,7	5539	-3573	-4,8 -23,4	-4,8 8,9	5600	-4161	-4,9 -27,2	-4,9 10,2
f _i			-2,7	-5,3			-28,2	4,1			-32,1	5,3
Egenvægt		0	0	0		1617	10,6	-4,0		2156	14,1	-5,3
Egv. + f _i			-2,7	-5,3			-17,6	+0,1			-18,0	-0,0
Hvilende last		0	0	0		938	6,1	-2,3		1250	8,2	-3,1
Egv. + f _i + hvil.			-2,7	-5,3			-11,5	-2,2			-9,8	-3,1
Bev. last		0	0	0		657	4,3	-1,6		875	5,7	-2,1
Fuld last + f _i			-2,7	-5,3			-7,2	-3,8			-4,1	-5,2
Δf = 15%			0,4	0,8			4,2	-0,6			4,8	-0,8
Fuld last + f _e			-2,3	-4,5			-3,0	-4,4			+0,7	-6,0
÷ bev. last		0	0	0		-657	-4,3	1,6		-875	-5,7	2,1
Egv. + f _e + hvil.			-2,3	-4,5			-7,3	-2,8			-5,0	-3,9

Af skemaet fremgår, at max. trykspænding er 18,0 MPa < 18,4. I snit C opstår et træk på 0,7 MPa. Det vil derfor være nødvendigt at justere kabelkraft og/eller -ekscentricitet. Dette undlades dog i dette eksempel.

Forskydning

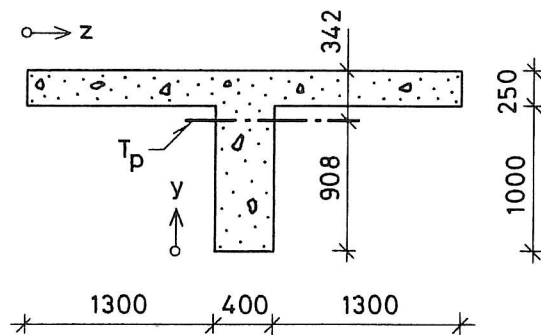
Hovedspændingerne beregnes af udtrykket

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2})$$

idet der ikke tages hensyn til normalspændinger σ_y i de vandrette snit.

σ_x og τ_{xy} skal naturligvis svare til samme punkt af tværsnittet og samme lasttilfælde.

Beregningen af σ_x fremgår af skemaet side 15. Beregningen af τ_{xy} sker ved hjælp af Grashoff's formel.



Figur 11. Betontværsnit. Mål i mm.

For bjælkekroppen fås, jfr. figur 11:

$$S_{\omega} = 400 \cdot y \cdot (908 - \frac{1}{2}y)$$

Ved tyngdepunktslinien fås svarende til $y = 908$ mm

$$S_{\omega, \max} = 1,65 \cdot 10^8 \text{ mm}^3$$

og dermed

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{V \cdot S_{\omega}}{t \cdot I} = \frac{S_{\omega}}{S_{\omega, \max}} \cdot V \cdot \frac{S_{\omega, \max}}{t \cdot I} = \\ &= \frac{S_{\omega}}{S_{\omega, \max}} \cdot V \cdot \frac{1,65 \cdot 10^8}{400 \cdot 1,39 \cdot 10^{11}} = 2,97 \cdot 10^{-6} \cdot V \cdot \frac{S_{\omega}}{S_{\omega, \max}} \end{aligned}$$

(MPa)

For fligene fås

$$S_{\omega} = z \cdot 250 \cdot (342 - \frac{1}{2} \cdot 250) = 54250 \cdot z$$

$$S_{\omega, \max} = 54250 \cdot 1300 = 7,05 \cdot 10^7 \text{ mm}^3$$

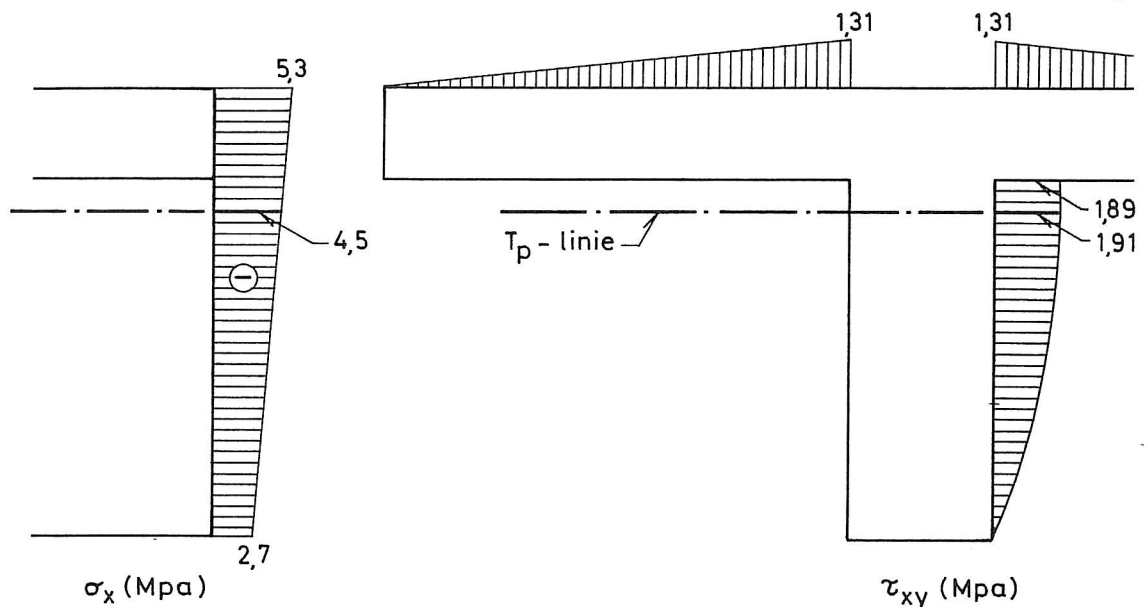
$$\tau_{xy} = \frac{S_{\omega}}{S_{\omega, \max}} \cdot V \cdot \frac{7,05 \cdot 10^7}{250 \cdot 1,39 \cdot 10^{11}} = 2,03 \cdot 10^{-6} \cdot V \cdot \frac{S_{\omega}}{S_{\omega, \max}} \text{ (MPa)}$$

I nedenstående tabel er forskydningskræfter og -spændinger beregnet.

	A. x = 0 m			B. x = 6,25 m			C. x = 12,5 m		
	V kN	Krop τ_{\max} MPa	Flig τ_{\max} MPa	V	Krop τ_{\max}	Flig τ_{\max}	V	Krop τ_{\max}	Flig τ_{\max}
Initial forspænding	-989			-173			0		
Egenvægt	345			173			0		
Egv. + f_i	-644	1,91	1,31	0	0	0	0	0	0
Hvilende last	200			100			0		
Egv. + f_i + hvil.	-444	1,32	0,90	100	0,30	0,20	0	0	0
Bev. last	140			86			45		
Fuld last + f_i	-304	0,90	0,62	186	0,55	0,38	45	0,13	0,09
$\Delta f \sim 15\%$	148			26			0		
Fuld last + f_e	-156	0,46	0,32	212	0,63	0,43	45	0,13	0,09
÷ bev. last	-140			-86			-45		
Egv. + f_e + hvil.	-296	0,88	0,60	126	0,37	0,26	0	0	0

Snit A

Tilfældet egenvægt + initial forspænding skønnes farligst. Spændingsfordelingen er vist på figur 12.



Figur 12. Spændingsfordeling i snit A for egenvægt + initial forspænding.

Ved tyngdepunktslinien fås

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \cdot (-4,5 \pm \sqrt{4,5^2 + 4 \cdot 1,91^2}) = \begin{cases} 0,7 \text{ MPa} < r_t \\ -5,2 & - \end{cases}$$

Betonnormen indeholder ikke noget krav vedrørende σ_1 . Det anbefales at holde σ_1 "passende" meget lavere end r_t , hvilket anses opfyldt her.

Den største hovedtrækspænding findes lidt under tyngdepunktslinien, men forholdene afviger så lidt fra de her undersøgte, at det ikke er umagen værd at finde den helt nøjagtige værdi af σ_1 .

Note: Ovenstående beregning skulle egentlig forlægges til et snit ca. 1,25 m (= bjælkehøjden) fra bjælkeenden, idet der først i denne afstand kan forventes at optræde de spændingsfordelinger, som fås af den almindelige bjælke-teori.

Bemærk, at det undertiden er muligt at anbringe understøtningen et stykke fra bjælkeenden, således at undersøgelsen af de største hovedspændinger ved understøtningstværsnittet kan foregå som ovenfor.

Forholdene ved bjælkeenden undersøges nærmere i afsnittet om spaltearmring.

Snit B. $x = 6,25 \text{ m}$

For fuld ydre last + effektiv forspænding haves (side 15 og 17)

$$\tau_{xy} = 0,63 \text{ MPa og } -4,4 \leq \sigma_x \leq -3,0 \text{ MPa}$$

Heraf fås

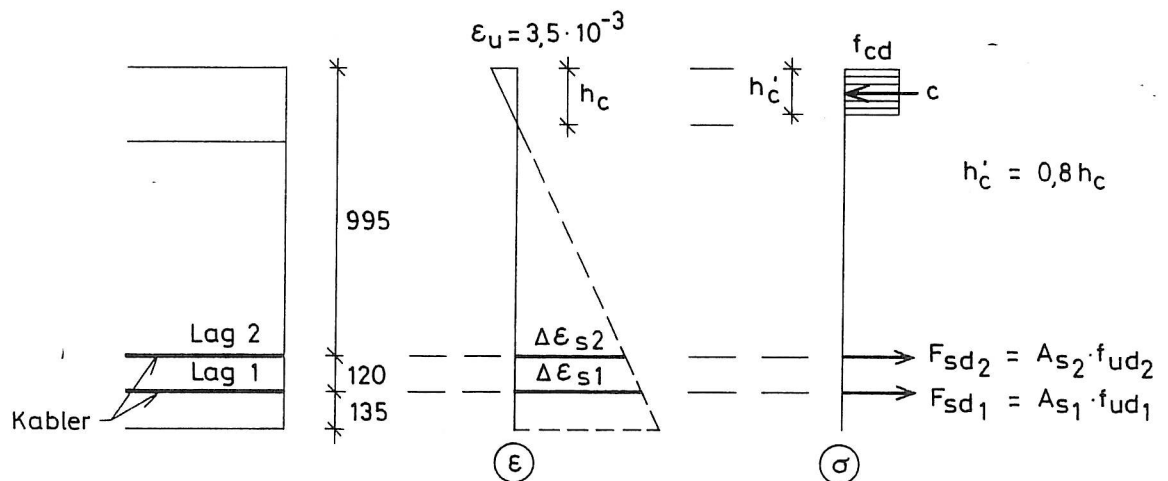
$$\sigma_1 \leq \frac{1}{2} \cdot (-3,0 + \sqrt{3,0^2 + 4 \cdot 0,63^2}) = 0,13 \text{ MPa} \ll r_t$$

De øvrige lasttilfælde skønnes mindre farlige.

Snit C. $x = 12,5 \text{ m}$

Forskydningsspændingerne er her så små, at farligste tilfælde kan skønnes at være det, der giver max. bøjningstrækspænding, dvs. (se side 15)

$$\sigma_1 = 0,7 \text{ MPa} < r_t$$

BRUDSTADIETBøjningsundersøgelseSnit C. $x = 12,5 \text{ m}$ Figur 13. Tøjninger og spændinger i brudstadiet.

Tøjningerne kan udtrykkes som summen af tøjningerne ϵ_0 hidrørende fra opspændingen og tillægstøjningerne $\Delta \epsilon$ fra den øvrige last.

For betonen fås

$$\epsilon_{co} \approx 0$$

da man jo tilstræber $\sigma_{co} \approx 0$ i oversiden for opspænding + egenvægt.

Dermed fås

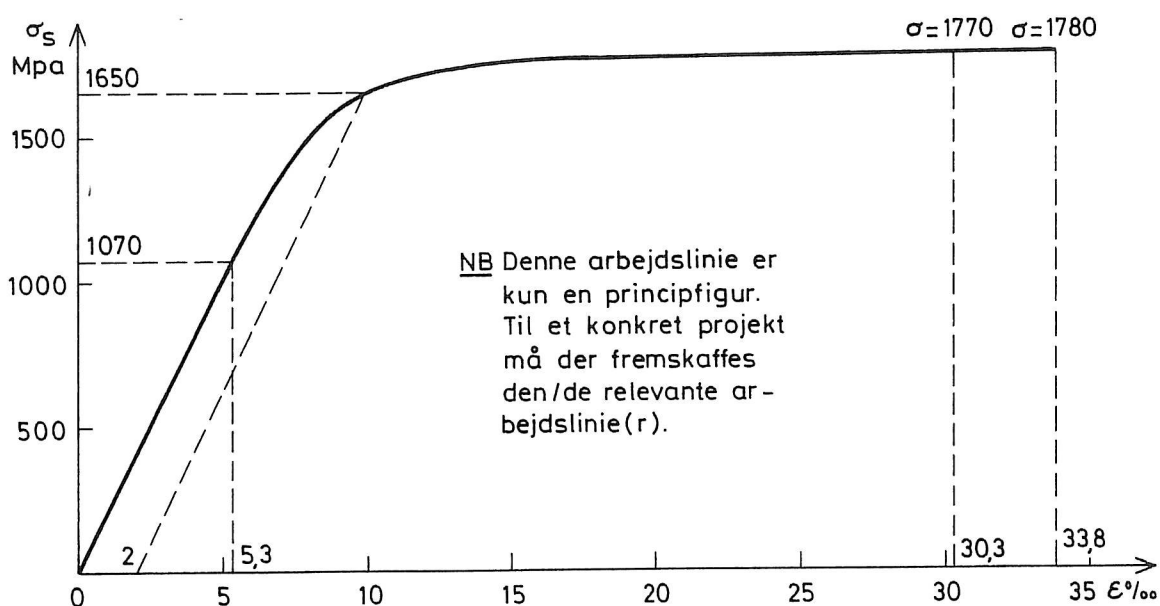
$$\Delta \epsilon_c \approx \epsilon_u = 3,5 \cdot 10^{-3}$$

For armeringen fås

$$\sigma_{s0} = 0,85 \cdot \frac{1400 \cdot 10^3}{1115} = 1070 \text{ MPa} \Rightarrow \epsilon_{s0} = 5,3 \cdot 10^{-3}$$

hvor faktoren 0,85 svarer til, at der tages udgangspunkt i langtidstilstanden.

Af arbejdslinien, se figur 14, fås herefter værdien for $\Delta\epsilon_s$ for hvert af de to armeringslag.



Figur 14. Arbejdslinie for spændstålet.

Skønl: $\underline{h_c = 122 \text{ mm}}$

$$\Delta\epsilon_{s2} = \frac{995-122}{122} \cdot 3,5 \cdot 10^{-3} = 25,0 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta\epsilon_{s1} = \frac{1115-122}{122} \cdot 3,5 \cdot 10^{-3} = 28,5 \cdot 10^{-3}$$

$$\epsilon_{s2} = (5,3+25,0) \cdot 10^{-3} = 30,3 \cdot 10^{-3}$$

$$\epsilon_{s1} = (5,3+28,5) \cdot 10^{-3} = 33,8 \cdot 10^{-3}$$

Af arbejdslinien aflæses de karakteristiske armeringsspændinger $f_{uk_2} = 1770 \text{ MPa}$ og $f_{uk_1} = 1780 \text{ MPa}$

$$\Rightarrow F_{sd_2} = 1115 \cdot \frac{1770}{1,4} \cdot 10^{-3} = 1410 \text{ kN}$$

$$\text{og } F_{sd_1} = 3 \cdot 1115 \cdot \frac{1780}{1,4} \cdot 10^{-3} = 4253 \text{ kN}$$

$$h_c = \frac{5 \cdot \frac{F_{s1} + F_{s2}}{b \cdot f_{cd}}}{4} = \frac{5 \cdot 5663 \cdot 10^3}{4 \cdot 3000 \cdot 19,4} = 122 \text{ mm} = \text{skøn}$$

Moment om trykkraftresultanten giver

$$\underline{M_{brud}} = 1410 \cdot 0,946 + 4253 \cdot 1,066 = \underline{5868 \text{ kNm}} > 4544$$

$$h_{int} = 743 + 342 - 0,4 \cdot 122 = 1036 \text{ mm}$$

Ang. armeringstøjningerne:

Det må kræves, at $\epsilon_s < \epsilon_{su}$, der ofte angives til $30 \cdot 10^{-3}$, dvs. 30 o/oo.

Hvis armeringstøjningen her skal holdes under $30 \cdot 10^{-3}$, kan dette opnås ved

- 1) indlæggelse af blød armering i trækzonen, hvilket forøger h_c og formindsker ϵ_s

eller

- 2) en nøjere vurdering af betonens tøjning, der ikke behøver at sættes til "standardværdien" 3,5 o/oo; hvis den sættes til f. eks. 2,5 o/oo, fås en ugunstigere spændingsfordeling i trykzonen, hvorved h_c øges og ϵ_s mindskes; herved mindskes brudmomentet, men det er der jo også "plads" til i det aktuelle tværsnit, idet det ovenfor fundne brudmoment er 29% større end nødvendigt.

Snit B. $x = 6,25 \text{ m}$

$$y_k = 743 - 98 = 645 \text{ mm} \Rightarrow \begin{cases} h_2 = 645 + 342 - 90 = 897 \text{ mm} \\ h_1 = 645 + 342 + 30 = 1017 \text{ mm} \end{cases}$$

Skøen: $h_c = 121 \text{ mm}$

$$\epsilon_{s_2} = 5,3 \cdot 10^{-3} + \frac{897 - 121}{121} \cdot 3,5 \cdot 10^{-3} = 27,7 \cdot 10^{-3}$$

$$\epsilon_{s_1} = 5,3 \cdot 10^{-3} + \frac{1017 - 121}{121} \cdot 3,5 \cdot 10^{-3} = 31,2 \cdot 10^{-3}$$

$$\Rightarrow f_{uk_2} = 1760 \text{ MPa} \quad F_{sd_2} = 1402 \text{ kN}$$

$$f_{uk_1} = 1770 \text{ MPa} \quad F_{sd_1} = 4229 \text{ kN}$$

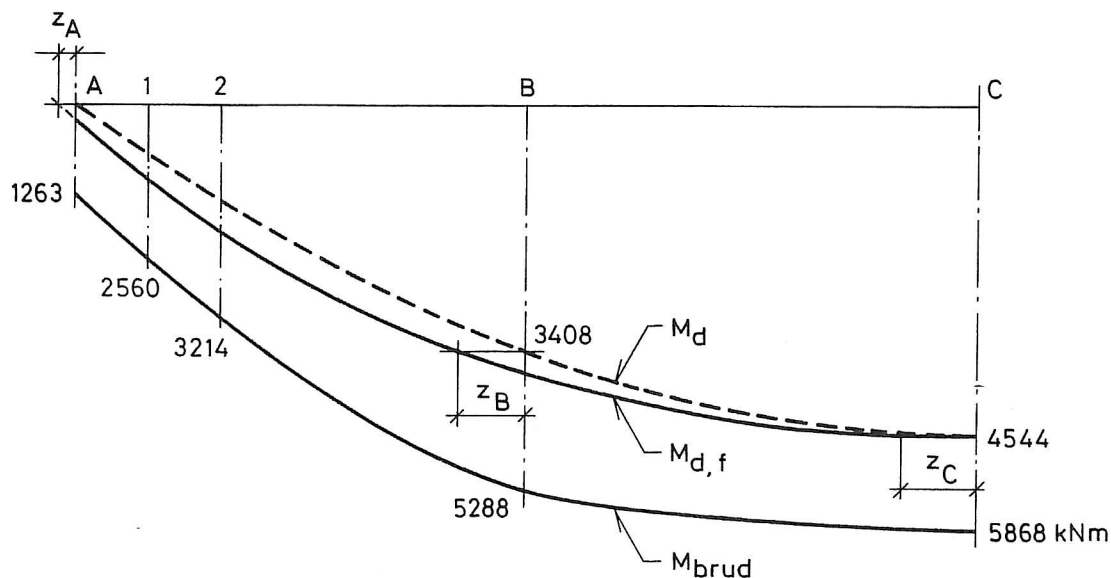
$$h_c = \frac{5 \cdot 1402 + 4229}{4 \cdot 3000 \cdot 19,4} \cdot 10^3 = 121 \text{ mm} = \text{skøen}$$

$$M_{brud} = 1402 \cdot 0,849 + 4229 \cdot 0,969 = 5288 \text{ kNm} > 3408$$

$$h_{int} \approx 645 + 342 - 0,4 \cdot 121 = 939 \text{ mm}$$

Beregningerne for snit A, snit 1 og snit 2 foregår på tilsvarende måde. Resultaterne er sammenfattet i nedenstående tabel samt på figur 15.

	x m	y_k mm	h_c mm	ϵ_{s_0} ‰	M_{brud} kNm	h_{int} mm
Snit A	0,0	-57	112	4,9	1263	240
- 1	1,0	124	120	5,0	2560	418
- 2	2,0	278	120	5,0	3214	572



Figur 15. Momentkurver.

På figur 15 ses kurven for det regningsmæssige moment M_d samt den forskudte momentkurve $M_{d,f}$. Den vandrette forskydning er $z = \frac{1}{2} \cdot h_{int} \cdot \cot \theta = h_{int}$, idet revnevinkelen θ vælges med $\cot \theta = 2$. Desuden er vist kurven for det beregnede brudmoments variation langs bjælken.

Forskydningsundersøgelse (lodrette bøjler)

Som udtryk for forskydningspåvirkningen beregnes

$$\tau = \frac{V}{b \cdot h_{int}} \quad \text{hvor}$$

$$V = V_O - V_C - V_t - V_p = V_O - \Delta V$$

med betegnelser som i betonnormen, DS 411.

V_O er den maksimale forskydningskraft for ydre laster.
 V_C og V_t hidrører fra variationen af den indre momentarm.
 V_p hidrører fra evt. særlig, opbøjet spændarmering og er ikke aktuel her (de opbøjede spændkabler udgør hovedtrækarmeringen).

Her er

$$\Delta V = V_C + V_t = F_{sd} \cdot \sin \phi$$

med ϕ = hovedarmeringens vinkel med vandret

og F_{sd} = trækkræften i hovedarmeringen svarende til det moment M_v , der fås ved den lastopstilling, som giver max. V_0

F_{sd} kan tilnærmet findes af formlen^{*)}

$$F_{sd} = \left(\frac{M_v}{h_{int}} + \frac{1}{2} V_0 \cot \theta \right) : (\cos \phi + \frac{1}{2} \sin \phi \cot \theta)$$

der med $\cot \theta = 2$ bliver til

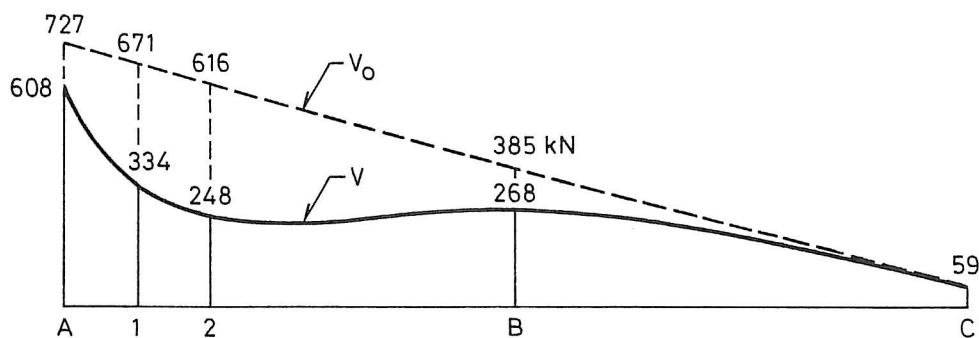
$$F_{sd} = \left(\frac{M_v}{h_{int}} + V_0 \right) : (\cos \phi + \sin \phi)$$

Beregningsresultaterne er sammenstillet i nedenstående skema samt på figur 16.

Snit	ϕ	M_v kNm	h_{int} m	V_0 kN	F_{sd} kN	ΔV kN	V kN
A	$11,1^\circ$	0	0,240	727	619	119	608
1	$9,6^\circ$	693	0,418	671	2020	337	334
2	$8,2^\circ$	1319	0,572	616	2580	368	248
B	$1,8^\circ$	3255	0,939	385	3736	117	268
C	0°	4138	1,036	59	4053	0	59

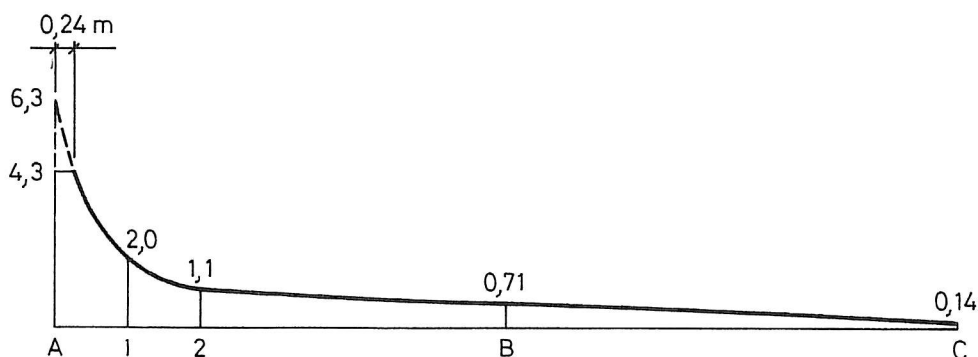
Bemærk, at resultaterne for snit A kun er vejledende, idet de komplicerede forhold i forankringszonen ikke dækkes fuldt af den her benyttede model.

^{*)} Udtrykket findes ved at benytte diagonaltrykmetoden for en bjælke med skrå underside og konstant forskydningskraft.



Figur 16. Max. forskydningskraft (kN).

Den formelle forskydningsspænding $\tau = \frac{V}{bh_{int}}$ er vist på grafen på figur 17.



Figur 17. Max. forskydningsspændinger (MPa).

Max. værdi af de skrå betontrykspændinger (ved A)

$$\sigma_c = \frac{1 + \cot^2 \theta}{\cot \theta} \cdot \tau = 2,5 \cdot 4,3 = 10,8 \text{ MPa} > v \cdot f_{cd} = 10,3 \text{ MPa}$$

Betondimensionen må derfor forøges lokalt. I afsnittet om spaltearmering konstateres der behov for at øge tykkelsen ved bjælkeenden til 630 mm, hvilket umiddelbart ses at være tilstrækkeligt i relation til σ_c .

Herved fås

$$\sigma_c = 2,5 \cdot 3,1 = 7,8 \text{ MPa} < v \cdot f_{cd}$$

Bøjlearmeringen beregnes ud fra udtrykket

$$N_{td} \cdot \cot\theta = A_{st} \cdot l \cdot f_{yd} \cdot \cot\theta \geq \tau_{dim} \cdot l \cdot b$$

hvor A_{st} er bøjlearealet pr. længdeenhed af bjælken, og l er den betragtede strækning ($l \leq h_{int} \cdot \cot\theta = 2 \cdot h_{int}$).

Heraf fås svarende til bøjler af tentorstål

$$A_{st} = \tau_{dim} \cdot \frac{b}{f_{yd}} \cdot \tan\theta = \tau_{dim} \cdot \frac{400}{400} \cdot \frac{1}{2} = 0,50 \cdot \tau_{dim}$$

med maksimumsværdien (ved snit A)

$$A_{st} = 0,50 \cdot 4,3 = 2,2 \text{ mm}^2/\text{mm} \sim \underline{\text{T 14 c 140 mm}}$$

Bemærk, at ændringen af bjælkebredden til 630 mm ikke ændrer dette resultat.

For snit B fås:

$$A_{st} = 0,50 \cdot 0,71 = 0,36 \text{ mm}^2/\text{mm} \sim \underline{\text{T 10 c 400 mm}}$$

Minimums-bøjlearmeringen fås af normkravet

$$A_{st} \geq 0,2 \cdot \frac{f_{tk}}{f_{yk}} \cdot b = 0,2 \cdot \frac{1,9}{560} \cdot 400 = 0,27 \text{ mm}^2/\text{m}$$

Alternativ beregning af forskydningsarmeringen

Benyttes i stedet den i annex A (DS 411) anførte metode, er kravet til forskydningsarmering:

$$N_{td} \geq (\tau - v - 0,1 \cdot \sigma_0) \cdot l \cdot b$$

τ er den formelle forskydningsspænding beregnet som ovenfor, dog kræves det her, at

$$\tau \leq \begin{cases} 0,35 f_{cd} = 6,8 \text{ MPa} \\ 7,0 \text{ MPa} \end{cases}$$

hvilket er opfyldt (se fig. 17).

$$v = 0,5 f_{td} = 0,9 \text{ MPa}$$

σ_0 er spændingen i betonarealets tyngdepunkt fra forspændingen. Som middelværdi for den betragtede strækning anvendes $\sigma_0 = 3,8 \text{ MPa}$ svarende til en effektiv normalkraft på $0,85 \cdot 5193 \cdot \cos 9,6^\circ = 4352 \text{ kN}$ i afstanden $x = 1,0 \text{ m}$ fra understøtningen.

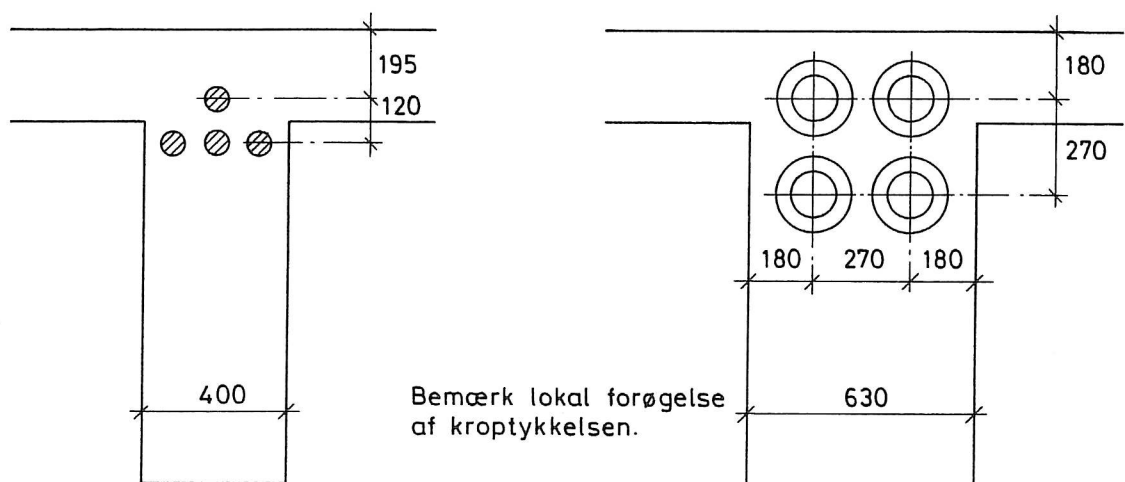
Det betyder, at der kun er behov for forskydningsarmering på strækninger, hvor $\tau > 0,9 + 0,1 \cdot 3,8 \sim 1,3 \text{ MPa}$, dvs. $x < \text{ca. } 1,7 \text{ m}$ (jvf. fig. 17).

Tilnærmes forskydningsspændingskurven fig. 17 med retliniede stykker, fås $N_{td} = 948 \text{ kN}$ svarende til 7,7 stk. T14 bøjler eller 1 T14 bøjle pr. ca. 220 mm.

I resten af bjælken er der kun behov for minimums-bøjlearmeringen, som beskrevet ovenfor. Der er altså tale om en besparelse i forskydningsarmeringen, når den alternative metode benyttes.

SPALTEARMERING

Pladskrav



Hidtil forudsat kabelplacering ved bjælkeende
(Kabeltyngdepunkt 285 mm fra bjælkens overside)

Placering under hensyn til pladskrav for forankringen
(Kabeltyngdepunkt 315 mm fra bjælkens overside)

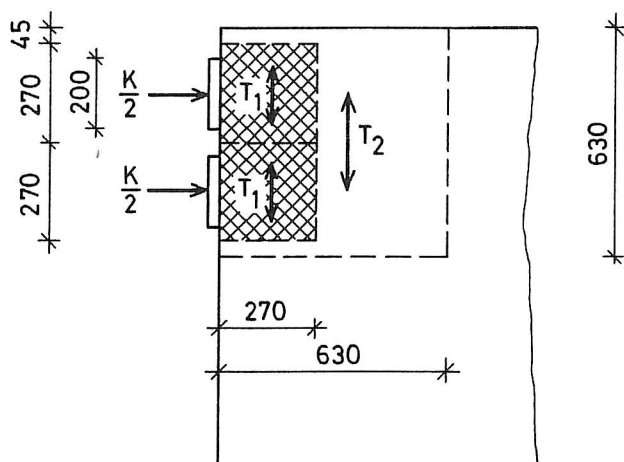
Figur 18. Pladskrav i forankringszonen.

Som det fremgår af figur 18, må kabelgeometri og betondimensioner justeres lidt. De dermed sammenhængende justeringer af beregningerne undlades dog i dette eksempel.

Bemærk, at der allerede på side 6 kunne være taget hensyn til ovenstående pladskrav.

Lodret spaltearmering

Af hensyn til en god revnefordeling benyttes en ganske lav armeringsspænding.



NB Effekten af reaktionen er negligeret.

Figur 19. Forankringszonen.

Primær zone: $h_a = 200 \text{ mm}$ $h = 270 \text{ mm}$

$$T_1 = 0,3 \cdot \frac{K}{2} \cdot \left(1 - \frac{h_a}{h}\right) = 0,3 \cdot \frac{5124}{2} \cdot \left(1 - \frac{200}{270}\right) = 200 \text{ kN}$$

$$A_{s_1} = T_1 / \sigma_s = \frac{200000}{100} = 2000 \text{ mm}^2 = \underline{26 \text{ R } 10}$$

Sekundær zone: $h_a = 540 \text{ mm}$ $h = 630 \text{ mm}$

$$T_2 = 0,3 \cdot K \cdot \left(1 - \frac{h_a}{h}\right) = 0,3 \cdot 5124 \cdot \left(1 - \frac{540}{630}\right) = 220 \text{ kN}$$

$$A_{s_2} = T_2 / \sigma_s = \frac{220000}{100} = 2200 \text{ mm}^2 = \underline{28 \text{ R } 10}$$

Vandret spaltearmering

Primær zone: $h_a = 200 \text{ mm}$ $h = 270 \text{ mm}$

dvs. trykspredningsforholdene er som i den primære zone i lodret retning \Rightarrow nødv. 26 R 10.

Sekundær zone:

Nederste lag: $h_a = 540 \text{ mm}$ $h = 630 \text{ mm}$

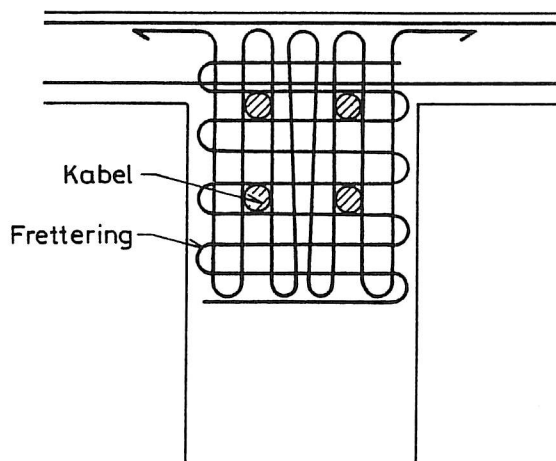
$$T_2 = 0,3 \cdot \frac{5124}{2} \cdot \left(1 - \frac{540}{630}\right) = 110 \text{ kN}$$

$$A_{a_2} = \frac{110000}{100} = 1100 \text{ mm}^2 \sim \underline{14 \text{ R } 10}$$

Øverste lag: $h_a = 540 \text{ mm}$ $h = 3000 \text{ mm}$

$$T_2 = 0,3 \cdot \frac{5124}{2} \cdot \left(1 - \frac{540}{3000}\right) = 630 \text{ kN}$$

$$A_{a_2} = \frac{630000}{260} = 2420 \text{ mm}^2 \sim \underline{8 \text{ T } 20}$$



Figur 20. Spaltearmering.

Spaltearmeringen placeres i afstanden $0,4 h$ a $0,5 h$ fra forankringen (kontaktfladen). På side 28 er placeringen markeret med pile for den lodrette spaltearmerings vedkommende.

